11/10/2018

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

Πρόταση: Έστω $\theta \in \mathbb{R}$ και $z = \cos\theta + (\sin\theta)i$
($\cos\theta$ = συνθ, $\sin\theta$ = ημθ) Τότε $|z| = 1$

Απόδειξη $|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1.$

Πρόταση. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$. Τότε υπάρχει μοναδικό
$\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε $z = \cos\theta + i\sin\theta$

Παραδείγματα. Ποιο είναι το $\theta \in [0, 2\pi)$ για
i) $z = 1$
ii) $z = -i$
iii) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

ΛΥΣΗ: i) Για $z = 1$, $\theta = 0$
ii) Για $z = -i$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

iii) Για $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Πόρισμα: Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$. Τότε υπάρχει μοναδικό $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε
$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Η παραπάνω έκφραση λέγεται τριγωνομετρική μορφή του z.

Απόδειξη. Θέτουμε $w = \frac{z}{|z|}$. Από ιδιότητα μέτρου μιγαδικού
$|w| = \left|z \cdot \frac{1}{|z|}\right| =$

$= \frac{|z|}{|z|} = 1$. Άρα από πρόταση υπάρχει μοναδικό $\theta \in [0, 2\pi)$

ώστε $w =$ συνθ $+$ (ημθ)i. Άρα $z = |z|$(συνθ $+ i\cdot$ημθ)

Άσκηση 5.| Φύλ.2

• $z = 1 + \sqrt{3}i$

ΛΥΣΗ. Έχουμε $|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

Θέτουμε $w = \frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ψάχνουμε $\theta \in [0, 2\pi)$ με $w = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$

Άρα $\left\{\begin{matrix} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ rad.

Συνεπώς $z = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$

• $z = 1 - \sqrt{3}i$

Έχουμε $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$.

Θέτουμε $w = \frac{z}{|z|}$.

Άρα $w = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

Άρα $z = 2(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

• $z = -1 - \sqrt{3}i \longrightarrow z = 2\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

• $z = 4 \longrightarrow |z| = |4| = 4$, $w = \frac{z}{|z|} = 1 \longrightarrow$

$z = 4(\text{συν}(0) + i \cdot \text{ημ}(0))$

• $z = -4 \longrightarrow |z| = |-4| = 4$, $w = \frac{z}{|z|} = -1 \longrightarrow$

$w = \text{συν}\pi + i\,\text{ημ}\pi$

$z = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

Ορισμός: Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$. Ένας πραγματικός αριθμός $\theta \in \mathbb{R}$ λέγεται ένα όρισμα του z αν $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Παρατήρηση: Είδαμε ότι υπάρχει μοναδικό όρισμα του z στο $[0, 2\pi)$

→ **Ερώτημα:** Έστω $z \in \mathbb{C}$ μη μηδενικό. Ποιο είναι το σύνολο των ορισμάτων του z;

→ **Απάντηση:** Έστω $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ όρισμα του z. Τότε ο $\theta \in \mathbb{R}$ είναι όρισμα του z αν και μόνο αν $\theta \in \{\ldots \theta_0 - 6\pi, \theta_0 - 4\pi, \theta_0 - 2\pi, \theta_0, \theta_0 + 2\pi, \theta_0 + 4\pi, \ldots\}$ δηλαδή αν-ν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $\theta = \theta_0 + 2k\pi$.

→ **Απόδειξη:** Γνωρίζουμε ότι $\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases} \Leftrightarrow \theta' = \theta + 2k\pi$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

→ **Παράδειγμα:** Ο μιγαδικός $z = i$ έχει σύνολο ορισμάτων
$$\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{-11\pi}{2}, \frac{-7\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \right.$$

Πρόταση: Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, μη μηδενικοί με τριγωνομετρικές μορφές
$$z_1 = |z_1|(\text{συν}(\theta_1) + i\,\text{ημ}(\theta_1))$$
$$z_2 = |z_2|(\text{συν}(\theta_2) + i \cdot \text{ημ}(\theta_2)) \text{ με } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$
Τότε (Κανόνας de Moivre)
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\text{συν}(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{ημ}(\theta_1 + \theta_2))$$
Άρα το $\theta_1 + \theta_2$ είναι ένα όρισμα του γινομένου $z_1 \cdot z_2$.

Απόδειξη: $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \left(\text{συν}(\theta_1) \cdot \text{συν}(\theta_2) - \text{ημ}(\theta_1) \cdot \text{ημ}(\theta_2)\right) + i\left(\text{συν}(\theta_1) \cdot \text{ημ}(\theta_2) + \text{συν}(\theta_2) \cdot \text{ημ}(\theta_1)\right) =$

= αυτό που θέλουμε από τριγωνομετρία (τύποι $\text{συν}(\theta_1 + \theta_2) = \ldots$ $\text{ημ}(\theta_1 + \theta_2) = \ldots$)

Πρόταση: Έστω $z \in \mathbb{C}$ μη μηδενικό με τριγωνομετρική μορφή $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ με $\theta \in \mathbb{R}$

Τότε $z^{-1} = \frac{1}{z}\left(\cos(\theta) + i \cdot \sin(-\theta)\right)$

Δηλ. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ και ένα όρισμα του $\frac{1}{z}$ είναι το $-\theta$.

Απόδειξη: Θέτουμε $w = \frac{1}{|z|}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$. Από κανόνα de Moivre

$z \cdot w = |z| \cdot \frac{1}{|z|}\left(\cos(\theta - \theta) + i\sin(\theta - \theta)\right) = \cos(0) + i \cdot \sin(0) = 1.$

Άρα $w = z^{-1}$.

Παράδειγμα: Υπολογίζουμε τον μιγαδικό $i^{-1} = \frac{1}{i}$.

Α' Τρόπος: Πολλαπλ. με συζυγή παρονομαστή

$$\frac{1}{i} = \frac{\overline{(i)}}{i\overline{(i)}} = \frac{-i}{1} = -i$$

Β' Τρόπος: $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \overset{\text{Πρόταση}}{\Rightarrow} \frac{1}{i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{2} + i\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = -i.$

Πόρισμα: Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ μη μηδενικοί, με τριγωνομετρική μορφή

$$z_1 = |z_1|(συν(\theta_1) + i \cdot ημ(\theta_1))$$
$$z_2 = |z_2|(συν(\theta_2) + i \cdot ημ(\theta_2))$$

Τότε $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(συν(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot ημ(\theta_1 - \theta_2))$

Απόδειξη: Άμεσα από τις δύο προηγούμενες προτάσεις

Πόρισμα: Έστω $z \in \mathbb{C}$ μη μηδενικός με τριγ. μορφή

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta), \text{ με } \theta \in \mathbb{R}$$

Έστω $n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 1$. Τότε

$$\underbrace{z^n}_{\substack{z \cdot z \cdots z \\ n \text{ φορές}}} = |z|^n (\cos(n\theta) + i \cdot ημ(n\theta))$$

Δηλαδή ο z^n έχει μέτρο το $|z|^n$ και ένα όρισμα του είναι το $n\theta$

Απόδειξη: Για $n=1$: προφανές

Για $n=2$: τύπος de Moivre

Για $n \geq 3$: " " " + επαγωγή

Άσκηση 7/ Φυλ. 2

Αν $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ να υπολογίσετε το z^{2017}.

ΛΥΣΗ: Έχουμε $|z| = 1$ και $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$

Συνεπώς από το πόρισμα

$$z^{2017} = \cos\left(\frac{2017\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2017\pi}{3}\right)$$

Έχουμε

$$\begin{array}{r|l} 2017 & 3 \\ \hline 21 & 672 \\ 17 & \\ 1 & \end{array}$$

άρα $2017 = 3 \cdot 672 + 1$

Έστω $\vartheta = \frac{2017\pi}{3} = \frac{(3 \cdot 672 + 1)\pi}{3} = 672\pi + \frac{\pi}{3} =$

$= 2(336)\pi + \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \text{ακέραιος}\, \pi + \frac{\pi}{3}$

Άρα $z^{2017} = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} = z$

Άσκηση 6 | Φυλ. 2

Να υπολογίσετε το $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6$.

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ Έπεται $|z| = 1$

και $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

Επομένως, από το πόρισμα,

$z^6 = \cos\frac{6\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2} = -i$

15/10/2018.

Υπενθ.: Αν $z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, $z \in \mathbb{C}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$

και $n \geq 1$, τότε $z^n = |z|^n(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta))$

Η εξίσωση $z^n = 1$ στο $\mathbb{C}$ (δηλ. για $z \in \mathbb{C}$)

Ορισμός: Έστω $n \geq 2$ ακέραιος, θέτουμε $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Ο w λέγεται ΑΡΧΙΚΗ n-στη ΡΙΖΑ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ.

Πρόταση: i) $w^n = 1$

ii) Οι μιγαδικοί αριθμοί $w, w^2, w^3, \ldots, w^n = 1$ είναι διαφορετικοί ανά δύο

iii) Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $z^n = 1$ στο $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο $\{w, w^2, w^3, \ldots, w^n = 1\}$

Απόδειξη

i) Από υπόθ. $\omega^n = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$.

ii) Έστω $1 \le i < j \le n$ και $\omega^i = \omega^j \Rightarrow \omega^i = \omega^{i+(j-i)} \Rightarrow$

$\omega^i = \omega^i \omega^{(j-i)} \Rightarrow \omega^i(\omega^{(j-i)} - 1) = 0 \underset{\omega \neq 0}{\Rightarrow} \omega^{j-i} = 1$

υπόθ.

$\Rightarrow \cos\frac{(j-i)2\pi}{n} + i\sin\frac{(j-i)2\pi}{n} = 1 \Rightarrow$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$

με $2k\pi = \frac{(j-i)2\pi}{n} \Rightarrow \frac{j-i}{n} \in \mathbb{Z}$, αντίφαση γιατί

$0 < \frac{j-i}{n} < 1$

iii) Φανερά $(\omega^i)^n = \omega^{in} = (\omega^n)^i = 1^i = 1$ Άρα

κάθε ω^i είναι ρίζα της εξίσωσης $z^n = 1$.

Αντίστροφα, έστω $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ρίζα της $z^n = 1$ (*)

(*) $\Rightarrow |z^n| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

Άρα $z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = 1 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$

$\Rightarrow$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $n\theta - 2\pi = 2k\pi \Rightarrow n\theta = (k+1)\pi \Rightarrow$

$\theta = \frac{2(k+1)\pi}{n} \Rightarrow z = \omega^i$ για κάποιο i με $1 \le i \le n$.

Φυλ.2 / Άσκηση 11.

Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο.

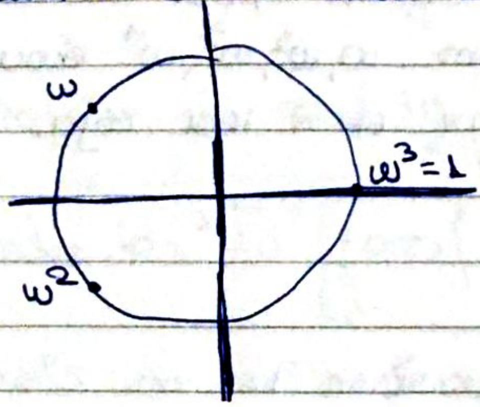
i) $z^3 = 1$.

Λύση:

$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Τότε $\omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επίσης $\omega^3=1$ από την Πρόταση, το σύνολο λύσεων στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $z^3=1$ είναι το εξής $\{\omega, \omega^2, \omega^3\}$



Χωρίζουμε τον μοναδιαίο κύκλο σε 3 ίσα τόξα, με το ένα σημείο να είναι το $(1,0)$. Τα άλλα δύο σημεία είναι αυτά που αντιστοιχούν στο ω και ω^2.

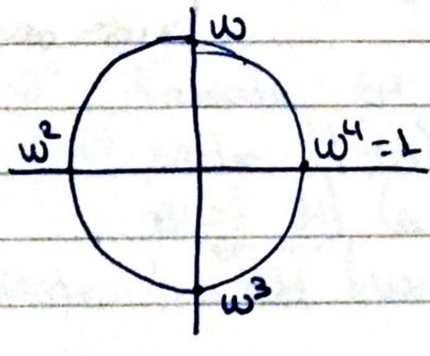
Παρατήρηση: Τα σημεία στο επίπεδο που αντιστοιχούν στα $\omega, \omega^2, \omega^3$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

ii) $z^4=1$.

ΛΥΣΗ: Θέτουμε $\omega=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=i$

Τότε $\omega^2=i^2=-1$, $\omega^3=i^3=(-1)i=-i$,
$\omega^4=1$

Συνεπώς από την Πρόταση το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $z^4=1$ στο $\mathbb{C}$ είναι $\{\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4\}=\{i,-1,-i,1\}$



Επομένως, τα σημεία στο επίπεδο που αντιστοιχούν στα $\omega, \omega^2, \omega^3$, $\omega^4=1$ χωρίζουν το μοναδιαίο κύκλο σε 4 ίσα τόξα